

机翼极限环主动抑制中的滑模趋近律设计研究

王诗其¹, 杨昊霖², 宋晨², 杨超²

(1. 中国商用飞机有限责任公司 上海飞机设计研究院, 上海 201210)

(2. 北京航空航天大学 航空科学与工程学院, 北京 100083)

摘要: 滑模控制(SMC)作为一种非线性控制方法对外界噪声干扰和参数扰动具有鲁棒性,近年来常用于机翼极限环(LCO)主动抑制研究。本文首先以频域分析法研究滑模控制系统稳定性相关因素,结果显示系统稳定性与滑模面参数 c 相关,与滑模趋近律 $g(t)$ 无关;同时通过时域分析法获得等速趋近律、指数趋近律、幂次趋近律的选择及参数变化对系统极限环幅值、收敛时间的影响规律。利用以上规律对间隙非线性二元翼段施加3种趋近律形式的SMC控制律,算例结果显示3种不同趋近律、趋近参数选择不影响闭环系统稳定性(极限环速度范围和极限环幅值);等速趋近律参数 ϵ 增加会减少系统收敛时间,提升系统抖振幅值;指数趋近律参数 η_1 的增加(ϵ_1 的降低)会减少系统收敛时间,降低系统抖振幅值;幂次趋近律参数 η_2 的增加在特定范围内会减少系统收敛时间,降低系统抖振幅值,且抖振幅值减缓效果较指数趋近律更为显著。

关键词: SMC; LCO; 等速趋近律; 指数趋近律; 幂次趋近律; 抖振

中图分类号: V215.3

文献标识码: A

Research of LCO suppression of airfoil based on SMC approaching law designing

WANG Shiqi¹, YANG Haolin², SONG Chen², YANG Chao²

(1. Shanghai Aircraft Design and Research Institute, Commercial Aircraft Corporation of China Ltd., Shanghai 201210, China)

(2. School of Aeronautic Science and Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: Sliding mode control (SMC) as a nonlinear control method, exhibits robustness against external noise disturbances and parameter variations, and has been increasingly applied in recent years to the active suppression of Limit cycle oscillations (LCO) in wings. This paper first investigates the factors influencing the stability of the sliding mode control system using frequency-domain analysis. The results indicate that the system's stability is related to the sliding surface parameter c , but not to the sliding mode approaching law $g(t)$. Furthermore, through time-domain analysis, the effects of different approaching laws, constant approaching law, exponential approaching law, power approaching law, and their parameter variations on the amplitude of the limit cycle and the convergence time of the system are examined. Based on these findings, three forms of SMC control laws are applied to a two-dimensional airfoil section with freeplay nonlinearity. The case study results show that the choice of different approaching laws and their parameters does not affect the stability of the closed-loop system (i.e., the velocity range and amplitude of the limit cycle). However, increasing the parameter ϵ of the constant rate approaching law reduces the system's convergence time while increasing the amplitude of chattering. For the exponential approaching law, increasing the parameter η_1 (or decreasing ϵ_1) reduces both the convergence time and the chattering amplitude. As for the power rate approaching law, increasing the parameter η_2 within a specific range reduces the convergence time and the chattering amplitude, with a more significant reduction in chattering amplitude compared to the exponential approaching law.

Key words: SMC; LCO; constant approaching law; exponential approaching law; power approaching law; chattering

收稿日期: 2026-04-30; 修回日期: 2026-07-29

基金项目: 国家自然科学基金(11402013, 92471202)

通信作者: 宋晨(1982—), 男, 博士, 副研究员。E-mail: songchen@buaa.edu.cn

引用格式: 王诗其, 杨昊霖, 宋晨, 等. 机翼极限环主动抑制中的滑模趋近律设计研究[J]. 航空工程进展.

WANG Shiqi, YANG Haolin, SONG Chen, et al. Research of LCO suppression of airfoil based on SMC approaching law designing[J]. Advances in Aeronautical Science and Engineering. (in Chinese)

0 引言

在滑模控制律设计中,趋近律的设计直接决定了系统状态从初始状态向滑模面运动的动态品质。传统的滑模控制律只能保证系统进入滑模面后具有良好的鲁棒性,但无法控制趋近阶段的性能。引入滑模趋近律,通过调整趋近律中的参数,可以在不牺牲鲁棒性的前提下,独立地调节趋近速度与抖振幅度之间的平衡。滑模控制(SMC)作为一种鲁棒性强的非线性控制方法,在气动弹性主动控制领域展现出显著优势且已取得显著研究成果^[1]。学者们针对不同类型的非线性系统提出了多种滑模控制策略。Li等将高阶滑模控制应用于机翼颤振抑制,有效降低了传统滑模控制的抖振现象^[2]。Zhu等提出了自适应滑模控制方法,通过在线调整控制参数来适应飞行条件变化^[3]。Wang将模糊逻辑与滑模控制结合,增强了系统对不确定性的处理能力^[4]。

然而,滑模控制在气动弹性应用中仍面临一些挑战,最主要的问题是抖振现象^[5-6]。抖振由控制律的高频切换引起,会导致执行机构磨损、能耗增加,甚至激发未建模的高频动力学^[7]。在气动弹性系统中,这一问题尤为突出,因为气动力的非线性耦合会放大抖振效应^[8]。为解决这一问题,研究者提出了多种改进方法:边界层法通过引入连续近似函数来平滑控制信号^[9];高阶滑模通过积分作

$$\begin{bmatrix} m & mx_a b \\ mx_a b & I_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_h & 0 \\ 0 & c_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_h & 0 \\ 0 & k_a(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \alpha \end{bmatrix} = -2\pi\rho Vb \left\{ \begin{bmatrix} 0 & V \\ 0 & -(\frac{1}{2}+a)bV \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & (\frac{1}{2}-a)b \\ -(\frac{1}{2}+a) & a^2b^2 \end{bmatrix} \right\} + \rho V^2 b \begin{bmatrix} c_{l\beta} \\ c_{m\beta} \end{bmatrix} \beta \quad (1)$$

式中: m 为质量; I_a 为惯性矩; c_h 为沉浮阻尼系数; c_a 为俯仰阻尼系数; k_h 为沉浮刚度系数; $k_a(\alpha)$ 为俯仰刚度系数; b 为半弦长; a 为弹性轴到 midpoint 距离; x_a 为弹性轴到重心距离; $c_{l\beta}$ 为控制面升力系数; $c_{m\beta}$ 为控制面力矩系数; ρ 为来流大气密度; V 为来流大气速度; h 为沉浮位移; α 为俯仰角。其中 $k_a(\alpha)$ 是随俯仰角变化的函数, $k_a(\alpha)$ 随俯仰角 α 变化关系如式(2)(k 为斜率, δ 为间隙角),对应位移—力关系曲线如图2所示。

用减弱抖振^[10];观测器辅助方法利用状态估计减少切换增益^[11]。但这些方法在气动弹性应用中各有局限,边界层法牺牲了鲁棒性,高阶滑模增加了设计复杂度,观测器设计本身面临气动参数不确定性的挑战。因此对非线性气动弹性滑模控制系统收敛时间和抖振幅值机理进行研究是有必要的。

本文作者先前以间隙非线性二元翼段、气动力、控制系统组成的气动弹性主动控制系统为研究对象,通过状态空间方程描述系统动力学模型,提出滑模控制律设计方法,该方法很大程度上抑制了LCO,但是相应带来了抖振现象^[12]。抖振虽然不会影响系统的鲁棒性,但会在一定程度上影响系统的品质,因此研究抖振的减缓方法与机理是有必要的。通过频域分析法研究了滑模面参数 c 和滑模趋近律 $g(t)$ 与闭环系统稳定性的关系,系统稳定性与 c 相关,与 $g(t)$ 无关。此外,对比等速趋近律、指数趋近律和幂次趋近律三种常见滑模趋近律,分析不同趋近律选择和参数变化对系统收敛时间和抖振幅值的影响。

1 模型描述

本文采用间隙非线性二元翼段为研究对象如图1所示。采用准定常气动力理论,忽略控制面惯性,得到式(1)所示气动弹性动力学方程^[14]。

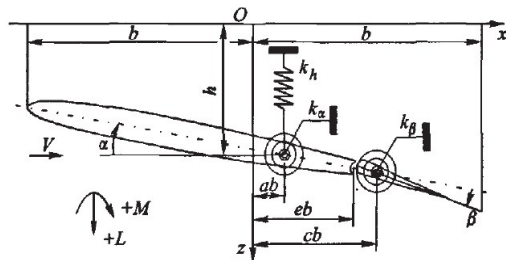


图1 二元翼段^[13]

Fig. 1 Two-dimensional airfoil^[13]

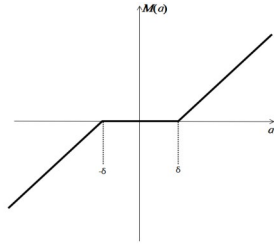


图2 位移-力关系曲线

Fig. 2 Displacement-force

$$k_a(\alpha) = \begin{cases} k(1 - \frac{\delta}{\alpha}) & (\alpha \geq \delta) \\ 0 & (-\delta < \alpha < \delta) \\ k(1 + \frac{\delta}{\alpha}) & (\alpha \leq -\delta) \end{cases} \quad (2)$$

引入状态变量 $x = [h \ \alpha \ \dot{h} \ \dot{\alpha}]^T$, 则式(1)所示动力学方程可表示为式(3)所示状态空间方程, 式(3)中矩阵 A 、 B 表达式如式(4)。

$$\dot{x} = A(x)x + B\beta \quad (3)$$

$$\begin{cases} A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \\ B = [0 \ 0 \ b_3 \ b_4]^T \end{cases} \quad (4)$$

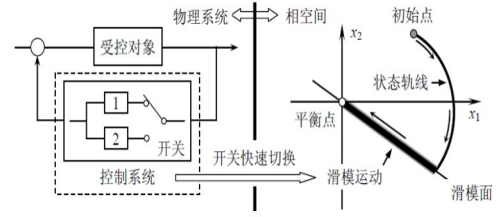
式(4)矩阵中各系数分别为 $a_{31} = -I_a \cdot k_h/d$, $a_{32} = [m x_a \cdot b \cdot k_a(a) - V^2(I_a \cdot \rho \cdot b \cdot c_{la} + m \cdot x_a \cdot b^3 \cdot \rho \cdot c_{ma})]/d$, $a_{33} = -[I_a(c_h + \rho \cdot V \cdot b \cdot c_{la}) + m \cdot \rho \cdot x_a \cdot b^3 \cdot c_{ma}]/d$, $a_{34} = -[I_a \cdot \rho \cdot V \cdot b^2 c_{la}(1/2 - a) - m \cdot x_a \cdot b \cdot c_a + m \cdot x_a \cdot \rho \cdot V \cdot b^4 \cdot c_{ma}(1/2 - a)]/d$, $a_{41} = m \cdot x_a \cdot b \cdot k_h/d$; $a_{42} = [V^2(m \cdot \rho \cdot x_a \cdot b^2 \cdot c_{la} + m \cdot \rho \cdot b^2 \cdot c_{ma}) - m \cdot k_a(a)]/d$, $a_{43} = m(x_a \cdot b \cdot c_h + x_a \cdot \rho \cdot V \cdot b^2 \cdot c_{la} + \rho \cdot V \cdot b^2 \cdot c_{ma})/d$, $a_{44} = -m[c_a - x_a \cdot \rho \cdot V \cdot b^3 \cdot c_{la}(1/2 - a) - \rho \cdot V \cdot b^3 \cdot c_{ma}(1/2 - a)]/d$, $b_3 = -V^2(I_a \cdot \rho \cdot b \cdot c_{l\beta} + m \cdot \rho \cdot x_a \cdot b^3 \cdot c_{m\beta})/d$, $b_4 = V^2(m \cdot x_a \cdot b^2 \cdot I_a \cdot \rho \cdot c_{l\beta} + m \cdot \rho \cdot b^2 \cdot c_{m\beta})/d$, $d = m(I_a - m \cdot x_a^2 \cdot b^2)$ 。

本文气动弹性模型参数^[15]为: $b = 0.135 \text{ m}$; $\delta = 1^\circ$; $m = 12.387 \text{ kg}$; $I_a = 0.065$; $x_a = 0.3267$; $k_h = 2884.4 \text{ N/m}$; $k = 28$; $c_h = 27.43 \text{ N}\cdot\text{s/m}$; $c_a = 0.036 \text{ N}\cdot\text{s}$; $\rho = 1.225 \text{ Kg/m}^3$; $a = -0.68$; $c_{la} = 6.28$; $c_{ma} = -1.1304$; $c_{m\beta} = -0.635$ 。经时域仿真计算得开环系统极限环速度范围为 $11.4 \sim 16.9 \text{ m/s}$ ^[12]。

2 滑模趋近律设计

2.1 滑模控制律设计原理

针对式(3)所示动力学系统, 在4维相空间内可以找到一个滑模面 s , 通过滑模面参数的调节可以获得目标控制律 β 。滑模控制与相空间滑模运动关系如图3所示。

图3 滑模控制与相空间滑模运动示意图^[16]Fig. 3 Figure of SMC and sliding mode movement in phase space^[16]

为保证系统收敛, 在滑模控制面参数选择时需满足 $s \cdot \dot{s} < 0$, 其中 $\dot{s}$ 是滑模趋近律函数, 代表滑模函数 $s(t)$ 趋近于滑模面 s 的速率, 通常情况下滑模面是系统状态变量的线性组合, 即:

$$s = c \cdot x, c \in R^{1 \times 4}, x \in R^{4 \times 1} \quad (5)$$

$c = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4]^T$, 由于本文研究系统为单输入系统, 则不妨设 $c_4 = 1$ 。令 $\dot{s} = g(t)$, 根据式(3)、(5)可得控制律表达式为

$$\beta(t) = -(cB)^{-1}[cAx - g(t)] \quad (6)$$

因此滑模控制律设计的关键在于参数 c 的求解和滑模趋近律 $g(t)$ 的确定, 接下来需要对系统滑模面参数 c 和滑模趋近律 $g(t)$ 进行设计和选择。

2.2 系统稳定性分析方法

通过频域分析法研究系统传递函数特征根的分布可判断系统稳定性相关参数, 若要使滑模控制系统稳定, 则需使系统特征根均在虚轴左侧^[17]。根据式(3)、式(4)可将滑模控制系统变量 $h(t)$ 、 $a(t)$ 、 $\beta(t)$ 、 $g(t)$ 之间的闭环系统框图分解成图4形式, 其中 $G_1(p)$ 代表输入变量 $a(t)$ 、 $\beta(t)$ 与输出变量 $h(t)$ 之间的传递函数, $G_2(p)$ 代表输入变量 $h(t)$ 、 $\beta(t)$ 与输出变量 $a(t)$ 之间的传递函数, $G_3(p)$ 代表输入变量 $h(t)$ 、 $a(t)$ 、 $g(t)$ 与输出变量 $\beta(t)$ 之间的传递函数, $G_4(p)$ 代表输入变量 $h(t)$ 、 $a(t)$ 与输出变量 $g(t)$ 之间的传递函数, p 代表复平面上的拉普拉斯

变量。

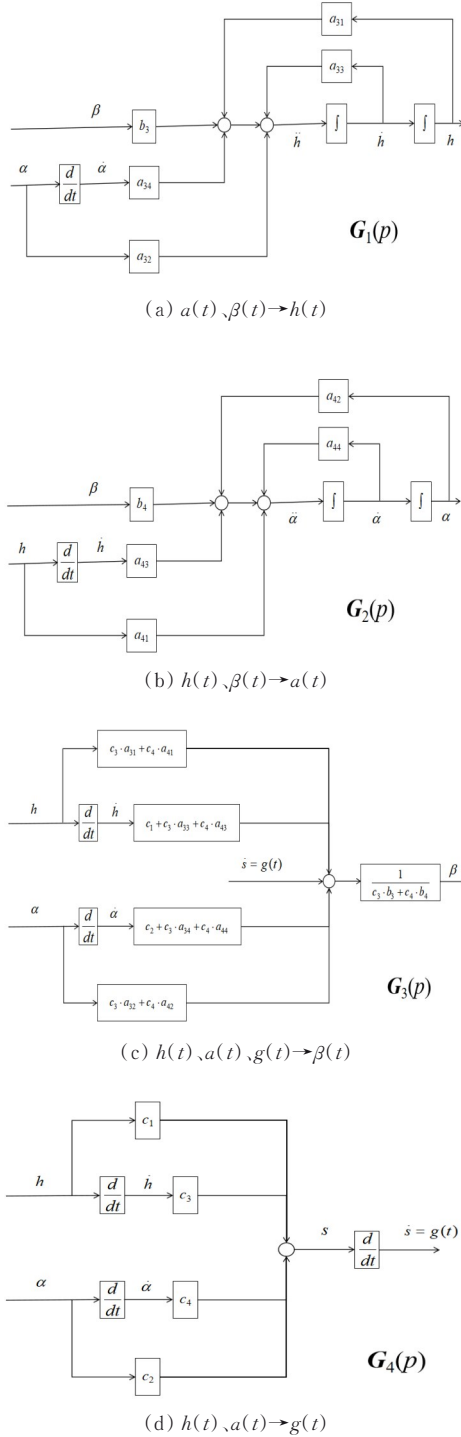


图4 闭环系统框图

Fig. 4 Block diagram of closed loop system

现对系统变量 $h(t)$ 、 $\alpha(t)$ 、 $\beta(t)$ 、 $g(t)$ 进行拉普拉斯变换可得：

$$\begin{cases} G_1(p) = [G_{11}(p) & G_{12}(p)] = \begin{bmatrix} \frac{h(p)}{\alpha(p)} & \frac{h(p)}{\beta(p)} \end{bmatrix} \\ G_2(p) = [G_{21}(p) & G_{22}(p)] = \begin{bmatrix} \frac{\alpha(p)}{h(p)} & \frac{\alpha(p)}{\beta(p)} \end{bmatrix} \\ G_3(p) = [G_{31}(p) & G_{32}(p) & G_{33}(p)] = \begin{bmatrix} \frac{\beta(p)}{h(p)} & \frac{\beta(p)}{\alpha(p)} & \frac{\beta(p)}{g(p)} \end{bmatrix} \\ G_4(p) = [G_{41}(p) & G_{42}(p)] = \begin{bmatrix} \frac{g(p)}{h(p)} & \frac{g(p)}{\alpha(p)} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (7)$$

根据图4和式(7)可得 $h(p)$ 、 $\alpha(p)$ 、 $\beta(p)$ 、 $g(p)$ 之间的关系为

$$\begin{bmatrix} -1 & G_{11}(p) & G_{12}(p) \\ G_{21}(p) & -1 & G_{22}(p) \\ G_{31}(p) & G_{32}(p) & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(p) \\ \alpha(p) \\ \beta(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -G_{33}(p)g(p) \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\text{令 } G = \begin{bmatrix} -1 & G_{11}(p) & G_{12}(p) \\ G_{21}(p) & -1 & G_{22}(p) \\ G_{31}(p) & G_{32}(p) & -1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } G^{-1} \text{ 的}$$

极值点在复平面的分布决定了系统的稳定性。根据图4和式(8)可知,闭环系统稳定性取决于滑模面参数 c 和趋近函数 $g(t)$,而 $g(t)$ 可自由选择可确保其稳定,因此在不考虑零极点对消的情况下,要保证系统的稳定性只需通过设计参数 c 使得 G^{-1} 的零点均在复平面虚轴左侧,即满足式(9)。式(9)中, G^{-1} 是矩阵 G 的逆矩阵; G^* 是矩阵 G 的伴随矩阵; $|G|$ 是矩阵 G 的行列式,可写成传递函数的形式; p_i 代表 $|G|$ 的零点, p_j 代表 $|G|$ 的极点; $\text{Re}(p_i)$ 代表 $|G|$ 零点根的实部。因此系统极限环速度范围由参数 c 决定,与 $g(t)$ 无关。

$$\begin{cases} G^{-1} = \frac{G^*}{|G|} \\ |G| = \frac{\prod_{i=1}^m (p - p_i)}{\prod_{j=1}^n (p - p_j)} \\ \text{Re}(p_i) < 0, i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (9)$$

根据式(9)可得出参数 c 范围,在该范围的有

限区域内可迭代寻找控制律 $\beta(t)$ 的次优解(使得极限环速度下限得到最大限度提升),将此结果带入方程式 $|G|=0$,可计算出闭环系统极限环速度范围,其中参数 c 的具体求解方法已在文献[12]详细说明。

2.3 滑模趋近律设计原理

在滑模趋近律 $g(t)$ (即 $\dot{s}$)设计时,人们往往要综合考虑抖振减缓、鲁棒性、收敛速度、参数敏感性和复杂程度等因素。此处通过研究等速趋近律、指数趋近律、幂次趋近律3种趋近律作用下闭环系统收敛时间和抖振幅值变化规律,从而设计出适用于式(3)所示动力学系统的控制律。在对滑模趋近律进行研究时,因为滑模函数 $s(t)$ 是系统状态变量 $x(t)$ 的线性组合,因此可通过研究各参数对滑模函数 $s(t)$ 收敛时间 T_1 (首次从初始状态 $s(0)$ 收敛到滑模面 $s(t)=0$ 所用时间)及抖振幅值 Δs 影响判断各参数对系统收敛时间和抖振幅值的影响。本文开环系统、闭环系统时域仿真采用的是四阶龙格库塔法,且迭代步长为 ΔT 。

2.3.1 等速趋近律

给定等速趋近参数 ϵ 、系统收敛时间 T_1 和系统迭代步长 ΔT ,此时系统趋近律函数和对应的控制律^[18]如式(10)。

$$\begin{cases} \dot{s} = -\epsilon \cdot \text{sign}(s), \epsilon > 0 \\ \beta(t) = -(cB)^{-1} [cAx + \epsilon \cdot \text{sign}(s)] \end{cases} \quad (10)$$

首先计算系统收敛时间和各参数之间的关系,不妨令滑模函数初始值 $s(0) > 0$ ($s(0) < 0$ 所得结论一样),此时式(10)所示微分方程求解过程和结果如式(11),可得收敛时间 T_1 随参数 ϵ 的增大而减小。

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= -\epsilon, \epsilon > 0 \Rightarrow ds = -\epsilon dt \\ \Rightarrow ds \Big|_{s=s(0)}^{s=0} &= -\epsilon t \Big|_{t=0}^{t=T_1} \\ \Rightarrow s(0) &= \epsilon T_1 \Rightarrow T_1 = \frac{s(0)}{\epsilon} \end{aligned} \quad (11)$$

接下来计算系统抖振幅值 Δs ($\Delta s > 0$)和各参数之间的关系,此时 $s(t)$ 的值在 Δs 和 $-\Delta s$ 之间反复切换,也就是在 ΔT 时间内 $s(t)$ 的值可从 Δs 变成 $-\Delta s$ 或从 $-\Delta s$ 变成 Δs ,且抖振幅值 Δs 求解过程和结果如式(12)。则抖振幅值 Δs 随参数 ϵ 的增大而增大,随迭代步长 ΔT 的增大而增大。

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= -\epsilon, \epsilon > 0 \Rightarrow ds = -\epsilon dt \\ \Rightarrow ds \Big|_{s=\Delta s}^{s=-\Delta s} &= -\epsilon t \Big|_{t=0}^{t=\Delta T} \\ \Rightarrow -2\Delta s &= -\epsilon \Delta T \Rightarrow \Delta s = \frac{\epsilon \Delta T}{2} \end{aligned} \quad (12)$$

2.3.2 指数趋近律

给定等速趋近参数(ϵ_1, η_1)、系统收敛时间 T_1 和系统迭代步长 ΔT ,此时系统趋近律函数和对应的控制律如式(13)^[19]。

$$\begin{cases} \dot{s} = -\epsilon_1 \cdot \text{sign}(s) - \eta_1 \cdot s, \epsilon_1 > 0, \eta_1 > 0 \\ \beta(t) = -(cB)^{-1} [cAx + \epsilon_1 \cdot \text{sign}(s) + \eta_1 \cdot s] \end{cases} \quad (13)$$

首先计算系统收敛时间 T_1 和各参数之间的关系,不妨令滑模函数初始值 $s(0) > 0$ ($s(0) < 0$ 所得结论一样),此时式(13)所示微分方程求解过程和结果如式(14)所示。

$$\begin{aligned} \dot{s} &= -\epsilon_1 \cdot \text{sign}(s) - \eta_1 \cdot s, \epsilon_1 > 0, \eta_1 > 0 \\ \Rightarrow ds &= -(\epsilon_1 + \eta_1 s) dt \Rightarrow \frac{ds}{s + \frac{\epsilon_1}{\eta_1}} = -\eta_1 dt \\ \Rightarrow d \left[\ln \left(s + \frac{\epsilon_1}{\eta_1} \right) \right] \Big|_{s=s(0)}^{s=0} &= -\eta_1 dt \Big|_{t=0}^{t=T_1} \\ \Rightarrow T_1 &= \frac{\ln \left(1 + \frac{s(0)}{\frac{\epsilon_1}{\eta_1}} \right)}{\eta_1} \end{aligned} \quad (14)$$

由式(14)可知收敛时间 T_1 是参数 ϵ_1, η_1 的函数,则将 T_1 分别对 ϵ_1, η_1 求导得式(15),由式(15)可得收敛时间 T_1 随参数 ϵ_1 的增大而减小,随参数 η_1 的增大而减小。

$$\begin{cases} \frac{\partial T_1}{\partial \epsilon_1} = -\frac{s(0)}{\epsilon_1 (\epsilon_1 + s(0) \eta_1)} < 0 \\ \frac{\partial T_1}{\partial \eta_1} = \frac{\frac{s(0)}{\epsilon_1} \eta_1 - (1 + \frac{s(0)}{\epsilon_1} \eta_1) \ln(1 + \frac{s(0)}{\epsilon_1} \eta_1)}{\eta_1 (1 + \frac{s(0)}{\epsilon_1} \eta_1)} < 0 \end{cases} \quad (15)$$

计算系统抖振幅值 Δs ($\Delta s > 0$)和各参数之间的关系,此时 $s(t)$ 的值在 Δs 和 $-\Delta s$ 之间反复切换,也就是在 ΔT 时间内 $s(t)$ 的值可从 Δs 变成 $-\Delta s$ 或从 $-\Delta s$ 变成 Δs ,且抖振幅值 Δs 求解过程和结果如式(16)所示。

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dt} &= -\epsilon_1 - \eta_1 s, \epsilon > 0 \Rightarrow ds = -(\epsilon_1 + \eta_1 s)dt \\
\Rightarrow d[\ln(\epsilon_1 + \eta_1 s)]|_{s=-\Delta s}^{s=\Delta s} &= -\eta_1 dt|_{t=0}^{t=\Delta T} \\
\Rightarrow \frac{\epsilon_1 + \eta_1 \Delta s}{\epsilon_1 - \eta_1 \Delta s} &= e^{\eta_1 \Delta T} \quad (16) \\
\Rightarrow \Delta s &= \frac{\epsilon_1 (e^{\eta_1 \Delta T} - 1)}{\eta_1 (e^{\eta_1 \Delta T} + 1)}
\end{aligned}$$

由式(16)可知振幅值 Δs 是参数 ϵ_1 、 η_1 、 ΔT 的函数,则将 Δs 分别对 ϵ_1 、 η_1 、 ΔT 求导得式(17),由式(17)可得抖振幅值 Δs 随参数 ϵ_1 的增大而增大,随参数 ΔT 的增大而增大,随参数 η_1 的增大而减小。

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta s}{\partial \epsilon_1} = \frac{(e^{\eta_1 \Delta T} - 1)}{\eta_1 (e^{\eta_1 \Delta T} + 1)} > 0 \\ \frac{\partial \Delta s}{\partial \Delta T} = \frac{2\epsilon_1 e^{\eta_1 \Delta T}}{(e^{\eta_1 \Delta T} + 1)^2} > 0 \\ \frac{\partial \Delta s}{\partial \eta_1} = \epsilon_1 \frac{2\eta_1 \Delta T e^{\eta_1 \Delta T} - e^{2\eta_1 \Delta T} + 1}{\eta_1^2 (e^{\eta_1 \Delta T} + 1)^2} < 0 \end{cases} \quad (17)$$

根据式(15)和式(17)可得:减小迭代步长 ΔT 可降低抖振幅值 Δs ;增大参数 η_1 可降低抖振幅值 Δs 和收敛时间 T_1 ;减小参数 ϵ_1 可降低抖振幅值 Δs 但会增加系统收敛时间 T_1 。

要想使得减小参数 ϵ_1 可同时降低抖振幅值 Δs 和系统收敛时间 T_1 ,则需给参数 ϵ_1 和参数 η_1 设立一个边界条件,为了能与等速趋近律结果进行对比,设立边界条件 $\epsilon_1 + \eta_1 = \epsilon$,当 $\eta_1 = 0$ 时,此时的指数趋近律与式(10)所示等速趋近律一样,将以上边界条件带入式(15)可得 $\frac{\partial T_1}{\partial \epsilon_1} > 0$,带入式(17)可得 $\frac{\partial \Delta s}{\partial \epsilon_1} > 0$,此时减小参数 ϵ_1 可同时降低抖振幅值 Δs 和系统收敛时间 ΔT 。

2.3.3 幂次趋近律

给定等速趋近参数(ϵ_2 、 η_2)、系统收敛时间 T_1 和系统迭代步长 ΔT ,此时系统趋近律函数和对应的控制律^[20]如式(18)所示。

$$\begin{cases} \dot{s} = -\epsilon_2 \cdot |s|^{\eta_2} \cdot \text{sign}(s), \epsilon_2 > 0, 1 > \eta_2 > 0 \\ \beta(t) = -(cB)^{-1} [cAx + \epsilon_2 \cdot |s|^{\eta_2} \cdot \text{sign}(s)] \end{cases} \quad (18)$$

首先计算系统收敛时间 T_1 和各参数之间的关系,不妨令滑模函数初始值 $s(0) > 0$ ($s(0) < 0$ 所得结论一样),此时式(18)所示微分方程求解过程和结果如式(19)。

$$\begin{aligned}
\dot{s} &= -\epsilon_2 \cdot |s|^{\eta_2} \cdot \text{sign}(s), \epsilon_2 > 0, 1 > \eta_2 > 0 \\
\Rightarrow ds &= -\epsilon_2 s^{\eta_2} dt \Rightarrow \frac{ds^{1-\eta_2}}{1-\eta_2} = -\epsilon_2 dt \\
\Rightarrow ds^{1-\eta_2}|_{s=s(0)}^{s=0} &= -\epsilon_2 (1-\eta_2) dt|_{t=0}^{t=T_1} \quad (19) \\
\Rightarrow (s(0))^{1-\eta_2} &= \epsilon_2 (1-\eta_2) T_1 \\
\Rightarrow T_1 &= \frac{(s(0))^{1-\eta_2}}{\epsilon_2 (1-\eta_2)}
\end{aligned}$$

从式(19)得出收敛时间 T_1 随参数 ϵ_2 的增加而减少,但 T_1 与参数 η_2 的关系还需对式将 T_1 对 η_2 进行求导得。

当 $0 < s(0) < e$ 时, $\frac{\partial T_1}{\partial \eta_2} > 0$ 在 $[0, 1)$ 恒成立,此时 T_1 随参数 η_2 的增大而增大, T_1 在 $\eta_2 = 0$ 时取最小值 $\frac{s(0)}{\epsilon_2}$ 。

当 $s(0) > e$ 时, $\frac{\partial T_1}{\partial \eta_2} > 0$ 在 $(1 - \frac{1}{\ln(s(0))}, 1)$ 成立,此时 T_1 随参数 η_2 在 $[0, 1)$ 的增大先减后增, T_1 在 $\eta_2 = 1 - \frac{1}{\ln(s(0))}$ 时取最小值 $\frac{e \ln(s(0))}{\epsilon_2}$ 。

计算系统抖振幅值 Δs ($\Delta s > 0$)和各参数之间的关系,此时 $s(t)$ 的值在 Δs 和 $-\Delta s$ 之间反复切换,也就是在 ΔT 时间内 $s(t)$ 的值可从 Δs 变成 $-\Delta s$ 或从 $-\Delta s$ 变成 Δs ,且抖振幅值 Δs 求解过程和结果如式(20)所示。

$$\begin{aligned}
\dot{s} &= -\epsilon_2 \cdot |s|^{\eta_2} \cdot \text{sign}(s), \epsilon_2 > 0, 1 > \eta_2 > 0 \\
\Rightarrow ds &= -\epsilon_2 s^{\eta_2} dt \Rightarrow \frac{ds^{1-\eta_2}}{1-\eta_2} = -\epsilon_2 dt \\
\Rightarrow ds^{1-\eta_2}|_{s=\Delta s}^{s=0} &= -\epsilon_2 (1-\eta_2) dt|_{t=0}^{t=\frac{\Delta T}{2}} \quad (20) \\
\Rightarrow (\Delta s)^{1-\eta_2} &= \frac{\epsilon_2 (1-\eta_2) \Delta T}{2} \\
\Rightarrow \Delta s &= \left[\frac{\epsilon_2 \Delta T}{2} (1-\eta_2) \right]^{\frac{1}{1-\eta_2}}
\end{aligned}$$

从式(20)得出抖振幅值 Δs 随参数 ϵ_2 的增加而增加,随迭代步长 ΔT 的增加而增加,但 Δs 与参数 η_2 的关系还需将 $\ln(\Delta s)$ (因 $\ln(\Delta s)$ 与 Δs 单调性一致)对 η_2 进行求导得到:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln(\Delta s)}{\partial \eta_2} &= \frac{\ln \left[\frac{\epsilon_2 \Delta T}{2} (1-\eta_2) \right] - 1}{(1-\eta_2)^2} \quad (21) \\
\text{令 } \frac{\partial \ln(\Delta s)}{\partial \eta_2} &> 0, \text{ 有 } \eta_2 < \frac{\epsilon_2 \Delta T - 2e}{\epsilon_2 \Delta T}, \text{ 则:}
\end{aligned}$$

当 $\epsilon_2 \Delta T < 2e$ 时, $\frac{\partial \Delta s}{\partial \eta_2} < 0$ 在 $[0, 1)$ 恒成立, 此时

Δs 随参数 η_2 的增大而减小, Δs 在 $\eta_2 = 0$ 时取最大值 $\frac{\epsilon_2 \Delta T}{2}$ 。

当 $\epsilon_2 \Delta T > 2e$ 时, $\frac{\partial \Delta s}{\partial \eta_2} < 0$ 在 $[\frac{\epsilon_2 \Delta T - 2e}{\epsilon_2 \Delta T}, 1)$ 成

立, Δs 在 $\eta_2 = \frac{\epsilon_2 \Delta T - 2e}{\epsilon_2 \Delta T}$ 时取最大值 $e^{\frac{\epsilon_2 \Delta T}{2e}}$ 。

2.4 滑模趋近律参数调节标准

2.4.1 等速趋近律

针对等速趋近律, 迭代步长 ΔT 可以无限调小直至满足指标要求。因为系统收敛时间 T_1 是关于参数 ϵ 的单调递增函数, 系统抖振幅值 Δs 是关于参数 ϵ 的单调递减函数, 因此在参数 ϵ 选择时, 需设立收敛时间 T_1 、抖振幅值 Δs 的指标 T_{10} 、 Δs_0 , 使其满足式(22)。

$$\begin{cases} \frac{s(0)}{\epsilon} < T_{10} \\ \frac{\epsilon \Delta T}{2} < \Delta s_0 \end{cases} \Rightarrow s(0) T_0 < \epsilon < \frac{2 \Delta s_0}{\Delta T} \quad (22)$$

2.4.2 指数趋近律

针对指数趋近律, 迭代步长 ΔT 、参数 η_1 可以无限调小直至满足指标要求。因为系统收敛时间 T_1 是关于参数 ϵ_1 的单调递减函数, 系统抖振幅值 Δs 是关于参数 ϵ_1 的单调递增函数, 因此在参数 ϵ_1 选择时, 需设立收敛时间 T_1 、抖振幅值 Δs 的指标 T_{10} 、 Δs_0 , 使其满足式(23)。

$$\frac{s(0) \eta_1}{e^{T_{10} \eta_1} - 1} < \epsilon_1 < \frac{\Delta s_0 \eta_1 (e^{T_{10} \eta_1} + 1)}{e^{T_{10} \eta_1} - 1} \quad (23)$$

2.4.3 幂次趋近律

针对幂次趋近律, 迭代步长 ΔT 可以无限调小直至满足指标要求。同时可通过控制 ΔT 满足 $\epsilon_2 \Delta T < 2e$, 此时抖振幅值 Δs 是关于参数 η_2 的单调递减函数, 此时参数 η_2 也可以无限调小直至满足 Δs 的指标要求。因为收敛时间 T_1 关于参数 η_2 的单调性受滑模函数初始值 $s(0)$ 影响, 且系统收敛时间 T_1 是关于参数 ϵ_2 的单调递减函数, 系统抖振幅值 Δs 是关于参数 ϵ_2 的单调递增函数, 因此在参数 ϵ_2 选择时, 需设立收敛时间 T_1 、抖振幅值 Δs 的指标 T_{10} 、 Δs_0 , 使其满足式(24)。

$$\frac{(s(0))^{1-\eta_2}}{T_{10}(1-\eta_2)} < \epsilon_2 < \frac{2(\Delta s)^{1-\eta_2}}{\Delta T(1-\eta_2)} \quad (24)$$

3 结果分析

现对开环系统分别按式(22)、式(23)、式(24)对应准则施加等速趋近律、指数趋近律、幂次趋近律, 通过对各趋近律参数进行调节可验证滑模趋近参数对系统性能指标的影响。

3.1 等速趋近律

针对式(4)所示间隙非线性系统, 给定系统初始状态 $x = [0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$, 施加式(10)所示滑模控制律, 通过滑模趋近律参数 ϵ 的调节可得系统性能指标(系统极限环幅值、收敛时间、抖振幅值)如表1所示, 其中极限环幅值是指系统状态(此时为舵偏角)在某一速度下极限环振动的幅值, 收敛时间是指系统状态(此时为俯仰角)首次收敛到零点位置所需时间, 抖振幅值是指系统状态(此时为舵偏角)收敛时的抖动幅值。

表1 系统性能指标(等速趋近律)
Table 1 System performance indicators
(constant approaching law)

ϵ	极限环速度下限/ ($m \cdot s^{-1}$)	极限环速度上限/ ($m \cdot s^{-1}$)	35 m/s 舵偏幅值/ ($^\circ$)	25 m/s 俯仰角收敛时间/s	25 m/s 舵偏抖振幅值/($^\circ$)
1	29.4	39.2	7.7	16.7	4×10^{-3}
2	29.4	39.2	7.7	12.3	8×10^{-3}
3	29.4	39.2	7.7	10.1	1.2×10^{-2}
4	29.4	39.2	7.7	8.6	1.6×10^{-2}
5	29.4	39.2	7.7	7.4	2.0×10^{-2}
6	29.4	39.2	7.7	6.6	2.5×10^{-2}
7	29.4	39.2	7.7	5.9	2.9×10^{-2}
8	29.4	39.2	7.7	5.3	3.3×10^{-2}

当来流速度为 35 m/s 时, 系统发生极限环振荡, 舵偏时域曲线如图5所示。当来流速度为 25 m/s 时, 系统收敛, 俯仰角时域曲线如图6所示, 舵偏时域曲线如图7所示。结果显示, 参数 ϵ 的变化对极限环速度范围无影响; 当闭环系统在某一速度发生极限环振动时, 参数 ϵ 的变化对极限环幅值无影响; 当闭环系统收敛时, 参数 ϵ 越大, 收敛时间越短, 抖振幅值越大, 因此可根据系统抖振幅值、收敛时间指标找到合适的参数 ϵ 范围。

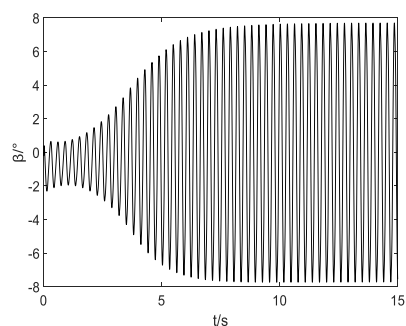
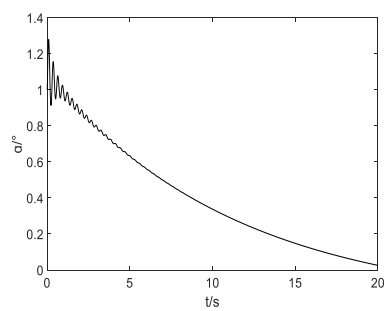
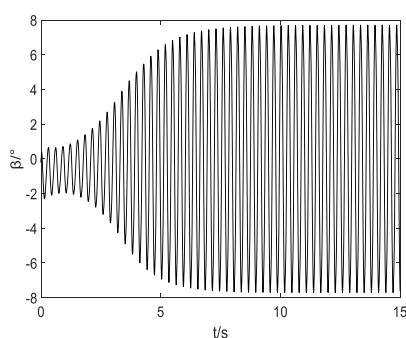
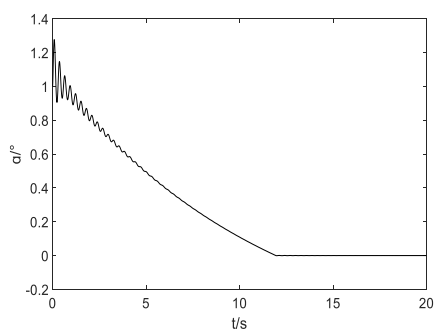
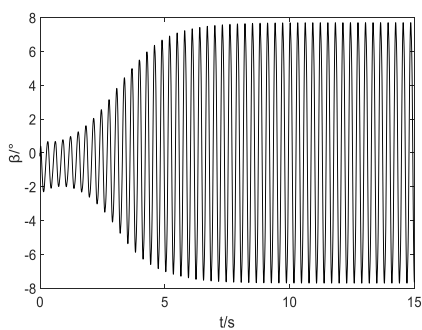
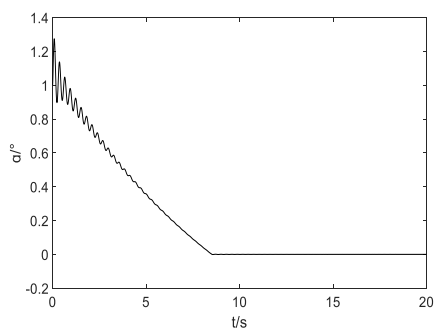
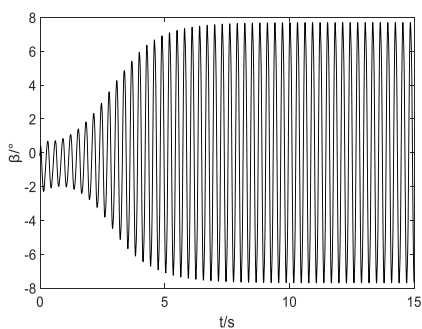
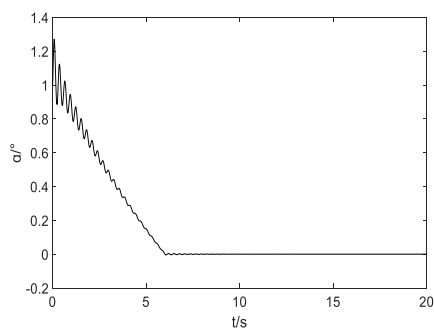
(a) $\epsilon=1$ (a) $\epsilon=1$ (b) $\epsilon=3$ (b) $\epsilon=3$ (c) $\epsilon=5$ (c) $\epsilon=5$ (d) $\epsilon=7$ (d) $\epsilon=7$

图5 35 m/s舵偏时域曲线(等速趋近律)
Fig. 5 Rudder deflection time curve at 35 m/s
(constant approaching law)

图6 25 m/s俯仰角时域曲线(等速趋近律)
Fig. 6 Pitch angle time curve at 25 m/s
(constant approaching law)

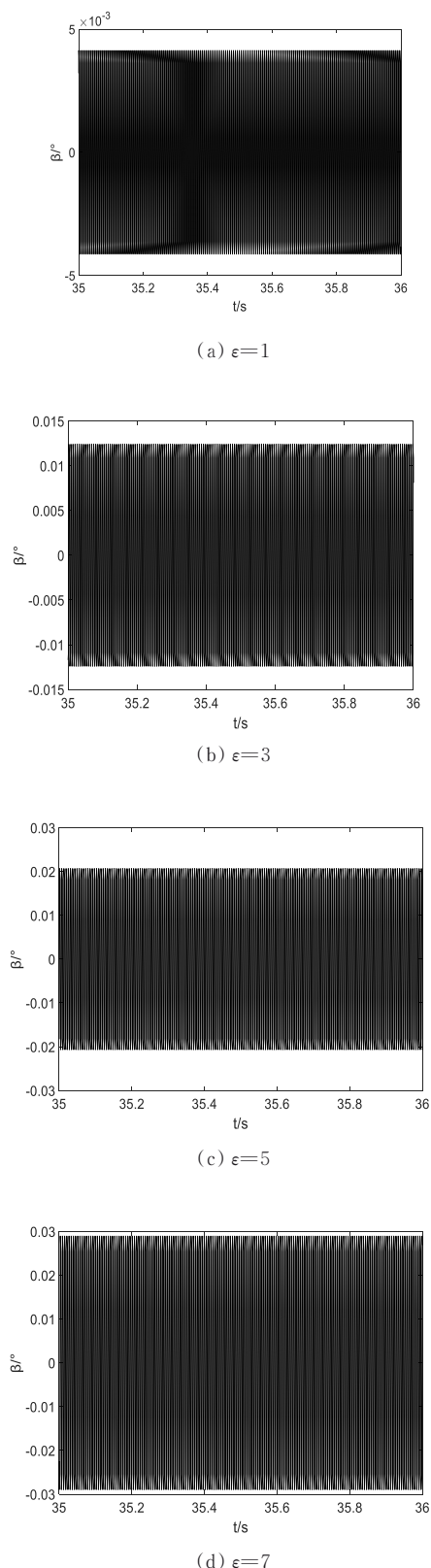


图7 25 m/s舵偏时域曲线(等速趋近律)

Fig. 7 Rudder deflection time curve at 25 m/s (constant approaching law)

3.2 指数趋近律

针对式(4)所示间隙非线性系统,给定系统初始状态 $x=[0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$,施加式(13)所示滑模控制律,通过滑模趋近律参数 ϵ_1 、 η_1 的调节可得系统性能指标(系统极限环幅值、收敛时间、抖振幅值)如表2所示,且 $\eta_1=0$ 时的指数趋近律即等速趋近律。

表2 系统性能指标(指数趋近律)
Table 2 System performance indicators
(exponential approaching law)

ϵ_1	η_1	极限环速度下限/ ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)	极限环速度上限/ ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)	35 m/s舵偏幅值/ ($^\circ$)	25 m/s俯仰角收敛时间/s	25 m/s舵偏抖振幅值/ ($^\circ$)
5.0	0	29.4	39.2	7.7	7.4	2.0×10^{-2}
4.5	0.5	29.4	39.2	7.7	3.0	1.9×10^{-2}
4.0	1	29.4	39.2	7.7	2.1	1.6×10^{-2}
3.5	3	29.4	39.2	7.7	1.6	1.4×10^{-2}
3.0	2	29.4	39.2	7.7	1.5	1.2×10^{-2}
2.5	2.5	29.4	39.2	7.7	1.3	1.0×10^{-2}
2.0	3	29.4	39.2	7.7	1.3	8×10^{-3}

当来流速度为 35 m/s 时,系统发生极限环振荡,舵偏时域曲线如图 8 所示。当来流速度为 25 m/s 时,系统收敛,俯仰角时域曲线如图 9 所示,舵偏时域曲线如图 10 所示。结果显示,参数 ϵ_1 、 η_1 的变化对极限环速度范围无影响;当闭环系统在某一速度发生极限环振动时,参数 ϵ_1 、 η_1 的变化对极限环幅值无影响;当闭环系统收敛时,设立边界条件 $\epsilon_1+\eta_1=\epsilon$,参数 η_1 越大(或 ϵ_1 越小),收敛时间越短,抖振幅值越小。

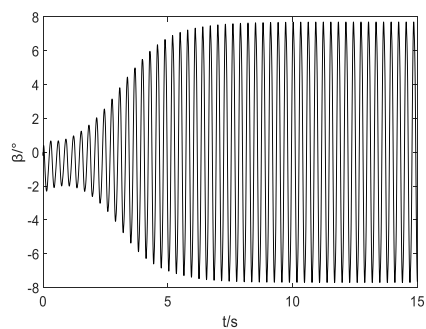
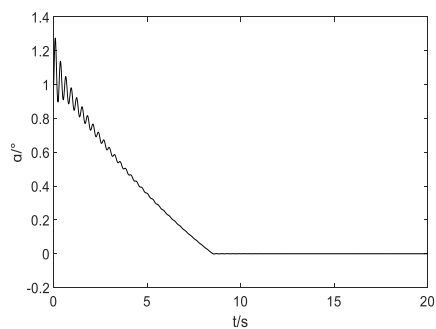
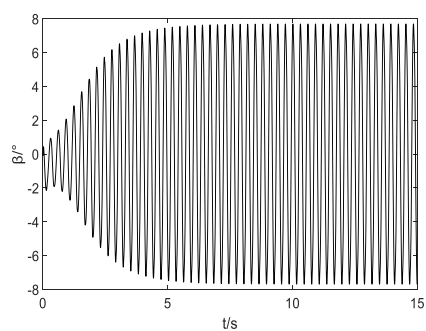
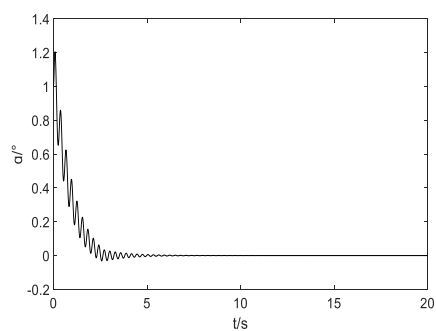
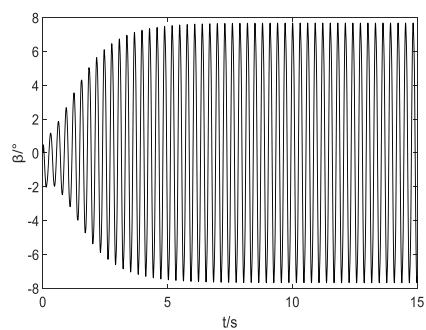
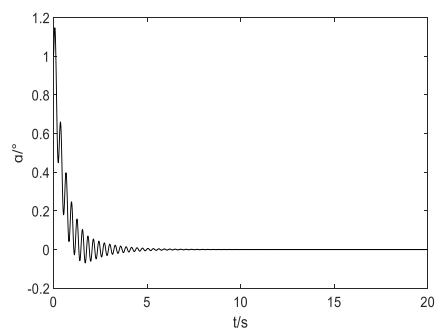
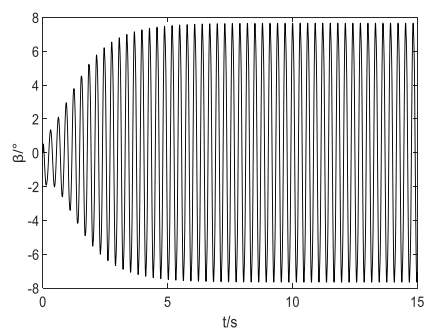
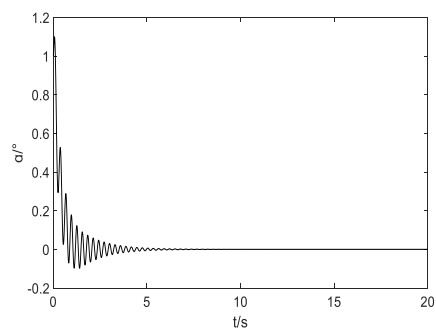
(a) $\epsilon_1=5, \eta_1=0$ (a) $\epsilon_1=5, \eta_1=0$ (b) $\epsilon_1=4, \eta_1=1$ (b) $\epsilon_1=4, \eta_1=1$ (c) $\epsilon_1=3, \eta_1=2$ (c) $\epsilon_1=3, \eta_1=2$ (d) $\epsilon_1=2, \eta_1=3$ (d) $\epsilon_1=2, \eta_1=3$

图8 35 m/s舵偏时域曲线(指数趋近律)
Fig.8 Rudder deflection time curve at 35 m/s
(exponential approaching law)

图9 25 m/s俯仰角时域曲线(指数趋近律)
Fig.9 Pitch angle time curve at 25 m/s
(exponential approaching law)

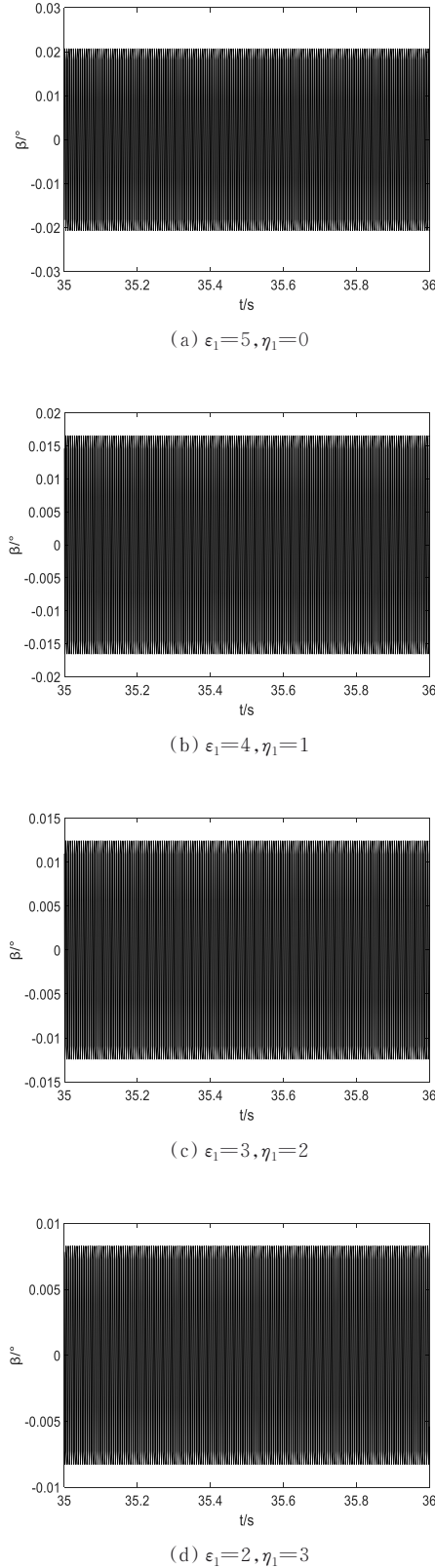


图10 25 m/s舵偏时域曲线(指数趋近律)
Fig. 10 Rudder deflection time curve at 25 m/s
(exponential approaching law)

3.3 幂次趋近律

针对式(4)所示间隙非线性系统,给定系统初始状态 $x=[0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$,施加式(18)所示滑模控制律,通过滑模趋近律参数 ϵ_2, η_2 的调节可得系统性能指标(系统极限环幅值、收敛时间、抖振幅值)如表5所示(此处固定 $\epsilon_2=5$ 不变),当 $\eta_2=0$ 时的指数趋近律即等速趋近律。

表3 系统性能指标(幂次趋近律)
Table 3 System performance indicators
(power approaching law)

ϵ_2	η_2	极限环速度 下限/ ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)	极限环速度 上限/ ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)	35 m/s舵 偏幅值/ ($^\circ$)	25 m/s俯 仰角收敛 时间/s	25 m/s舵 偏抖振幅 值/($^\circ$)
5	0	29.4	39.2	7.7	7.4	2.0×10^{-2}
5	0.1	29.4	39.2	7.7	5.9	1.1×10^{-2}
5	0.2	29.4	39.2	7.7	4.6	5.5×10^{-3}
5	0.3	29.4	39.2	7.7	3.6	2.2×10^{-3}
5	0.4	29.4	39.2	7.7	2.7	6.4×10^{-4}
5	0.5	29.4	39.2	7.7	2.2	1.1×10^{-4}
5	0.6	29.4	39.2	7.7	1.6	8.0×10^{-6}
5	0.7	29.4	39.2	7.7	1.3	1.0×10^{-7}

当来流速度为 35 m/s 时,系统发生极限环振荡,舵偏时域曲线如图 11 所示。当来流速度为 25 m/s 时,系统收敛,俯仰角时域曲线如图 12 所示,舵偏时域曲线如图 13 所示,可以看出:参数 ϵ_2, η_2 的变化对极限环速度范围无影响;当闭环系统在某一速度发生极限环振动时,参数 ϵ_2, η_2 的变化对极限环幅值无影响;当闭环系统收敛时,在特定范围内,参数 η_2 越大,收敛时间越短,抖振幅值越小,且抖振幅值的减缓效果相比于指数趋近系统更显著。

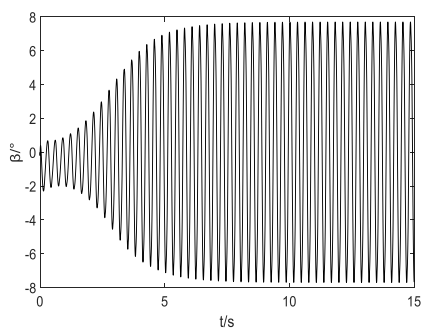
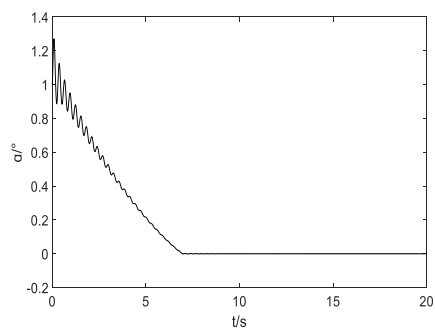
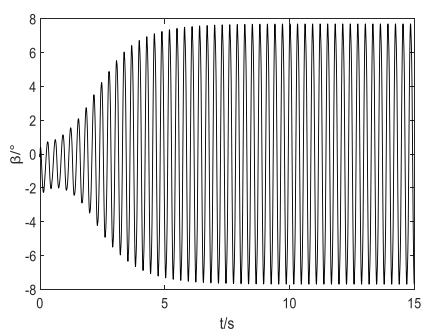
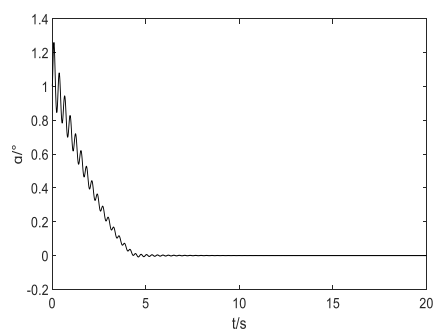
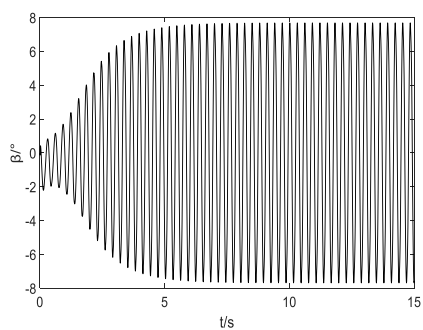
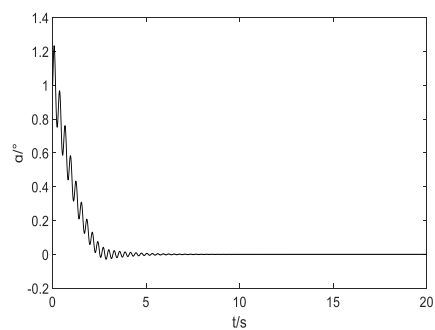
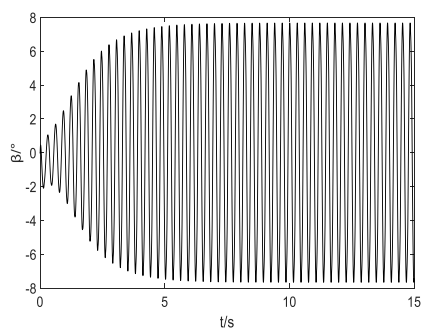
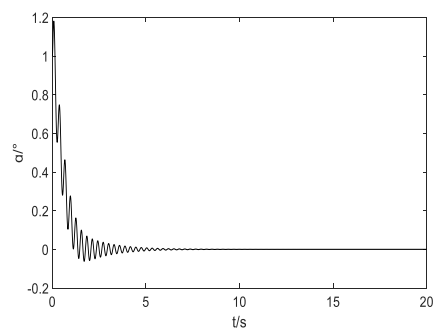
(a) $\varepsilon_2=5, \eta_2=0.1$ (a) $\varepsilon_2=5, \eta_2=0.1$ (b) $\varepsilon_2=5, \eta_2=0.3$ (b) $\varepsilon_2=5, \eta_2=0.3$ (c) $\varepsilon_2=5, \eta_2=0.5$ (c) $\varepsilon_2=5, \eta_2=0.5$ (d) $\varepsilon_2=5, \eta_2=0.7$ (d) $\varepsilon_2=5, \eta_2=0.7$

图 11 35 m/s 舵偏时域曲线(幂次趋近律)
Fig. 11 Rudder deflection time curve at 35 m/s
(power approaching law)

图 12 25 m/s 俯仰角时域曲线(幂次趋近律)
Fig. 12 Pitch angle time curve at 25 m/s
(power approaching law)

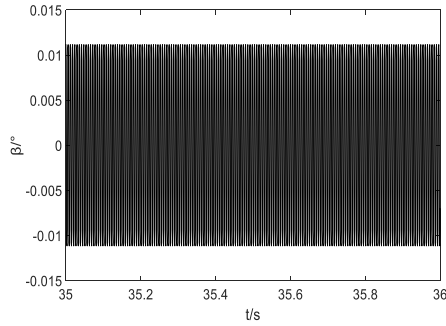
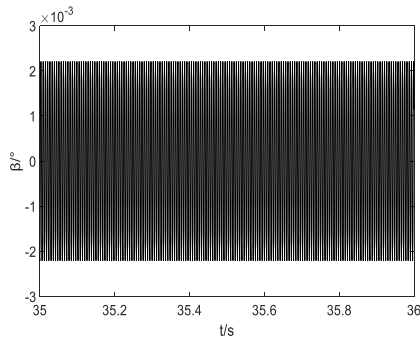
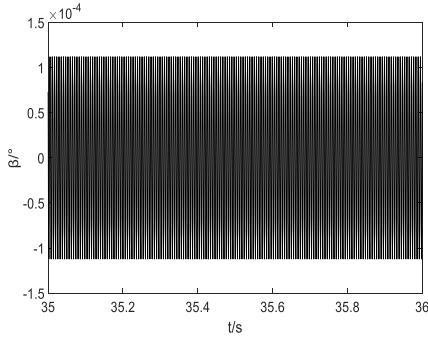
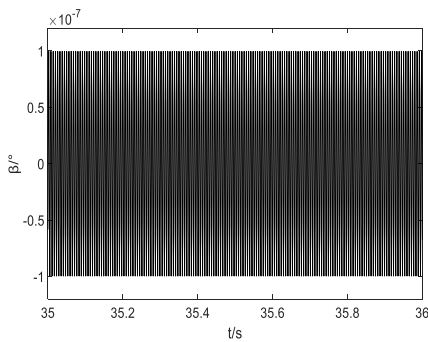
(a) $\varepsilon_2=5, \eta_2=0.1$ (b) $\varepsilon_2=5, \eta_2=0.3$ (c) $\varepsilon_2=5, \eta_2=0.5$ (d) $\varepsilon_2=5, \eta_2=0.7$

图 13 25 m/s 舵偏时域曲线(幂次趋近律)
Fig. 13 Rudder deflection time curve at 25 m/s
(power approaching law)

4 结 论

1) 滑模控制系统的稳定性(闭环系统极限环速度范围和幅值)与滑模控制面参数 c 相关,而与趋近律 s 无关,因此在确保滑模运动稳定时滑模趋近律种类和参数的变化不会影响系统的稳定性。

2) 等速趋近律形式下的 SMC 控制律通过趋近律参数的调整可降低系统收敛时间,但同时会增加系统抖振幅值,因此在参数选择时需同时满足收敛时间和抖振幅值的指标要求。

3) 指数趋近律形式下的 SMC 控制律通过趋近律参数的调节、设立趋近律参数边界条件来同时达到系统收敛时间和抖振幅值的指标要求。

4) 幂次趋近律形式下的 SMC 控制律也可通过趋近律参数的调节来同时达到系统收敛时间和抖振幅值的指标要求,且抖振幅值的减缓效果相比于指数趋近系统更显著。

参 考 文 献

- [1] 仇磊. 低音速非线性气动弹性机翼的主动控制研究[D]. 镇江: 江苏科技大学, 2015.
Qiu Lei. Active control of low-sonic velocity nonlinear aeroelasticity wing [D]. Zhenjiang: Jiangsu University of Science and Technology, 2015. (in Chinese)
- [2] LI D, GUO S, XIANG J. Chattering-free adaptive sliding mode control for aeroelastic systems [J]. Journal of Sound and Vibration, 2017, 395: 64-79.
- [3] 朱其新, 王嘉祺, 谢广明. 伺服系统复合自适应控制研究综述[J]. 航空制造技术, 2021, 64(22): 14-27.
Zhu Qixin, Wang Jiaqi, Xie Guangming. Review of composite adaptive control for servo system [J]. Aeronautical Manufacturing Technology, 2021, 64(22): 14-27. (in Chinese)
- [4] 王雨佳. 非线性动态系统自适应神经网络优化控制研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2021.
Wang Yujia. Adaptive neural network optimal control of nonlinear dynamic systems [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2021. (in Chinese)
- [5] 牟让科. 机翼非线性颤振和抖振特性研究[D]. 西安: 西北工业大学, 2003.
Mou Rangke. Study on Characteristics of nonlinear flutter and buffet of wings of aircraft [D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2003. (in Chinese)
- [6] 陈桂彬, 邹丛青, 杨超. 气动弹性设计基础[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2004.
Chen G B, Zou C Q, Yang C. Aeroelastic design foundation [M]. Beijing: Beijing University of Aeronautics & Astronautics Press, 2004. (in Chinese)
- [7] 黄锐, 胡海岩. 飞行器非线性气动伺服弹性力学[J]. 力学

- 进展, 2021, 51(3): 428-466.
- Huang Rui, Hu Haiyan. Nonlinear aeroservoelasticity of aircraft[J]. *Advances in Mechanics*, 2021, 51(3): 428-466. (in Chinese)
- [8] 侯英昱, 李齐, 季辰, 等. 超声速低频大抖振气动弹性载荷试验[J]. *航空学报*, 2022, 43(3): 47-54.
- Hou Yingyu, Li Qi, Ji Chen, et al. Experimental design of aeroelastic load with supersonic low frequency and large buffeting[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2022, 43(3): 47-54. (in Chinese)
- [9] 李家旭, 田玮, 谷迎松. 考虑间隙非线性的控制舵非线性气动弹性分析[J]. *航空工程进展*, 2020, 11(6): 827-835, 850.
- Li Jiaxu, Tian Wei, Gu Yingsong. Nonlinear aero-elastic analysis of control fin with free-play nonlinearity[J]. *Advances in Aeronautical Science and Engineering*, 2020, 11(6): 827-835, 850. (in Chinese)
- [10] 刘陆. 高阶滑模控制理论若干问题研究[D]. 镇江: 江苏大学, 2020.
- Liu Lu. Study on several problems of high-order sliding mode control theory[D]. Zhenjiang: Jiangsu University, 2020. (in Chinese)
- [11] 宋晨, 王诗其, 杨超. 基于滑模观测器的机翼颤振主动抑制设计[J]. *北京航空航天大学学报*, 2017, 43(6): 1098-1104.
- Song Chen, Wang Shiqi, Yang Chao. Active flutter suppression design of a wing based on sliding mode observer[J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2017, 43(6): 1098-1104. (in Chinese)
- [12] 王诗其, 张征, 宋晨, 等. 基于滑模控制律的机翼极限环主动抑制[J]. *北京航空航天大学学报*, 2025, 51(6): 2033-2040.
- Wang Shiqi, Zhang Zheng, Song Chen, et al. Limit cycle oscillation suppression of an airfoil based on sliding mode control law[J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2025, 51(6): 2033-2040. (in Chinese)
- [13] 宋晨, 吴志刚, 杨超. 二元机翼滑模变结构控制颤振主动抑制[J]. *北京航空航天大学学报*, 2010, 36(12): 1400-1403.
- Song Chen, Wu Zhigang, Yang Chao. Sliding mode variable structure control of flutter suppression for two-dimensional wing[J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2010, 36(12): 1400-1403. (in Chinese)
- [14] De Laurier J. Introduction to aeroelasticity[M]. Reston: CRC Press: 2024.
- [15] Singh S N, Yim W. State feedback control of an aeroelastic system with structural nonlinearity[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2003, 7(1): 23-31.
- [16] 宋晨. 飞机颤振主动抑制控制方法及对策研究[D]. 北京: 北京航空航天大学, 2010.
- Song Chen. Methodology and strategy for active flutter suppression of airplane[D]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2010. (in Chinese)
- [17] 宋永端. 自动控制原理[M]. 北京: 机械工业出版社, 2020.
- Song Yongduan. Principles of automatic control[M]. Beijing: China Machine Press, 2020. (in Chinese)
- [18] 米阳, 潘达, 吴晓, 等. 基于等速趋近律的滑模负荷频率控制设计[J]. *控制工程*, 2014, 21(3): 326-329.
- Mi Yang, Pan Da, Wu Xiao, et al. The research of sliding mode load frequency control strategy based on constant reaching law[J]. *Control Engineering of China*, 2014, 21(3): 326-329. (in Chinese)
- [19] 冯立杰, 盛泽, 张虎翼. 基于改进型指数趋近律的模糊滑模控制[J]. *科学技术与工程*, 2024, 24(10): 4108-4114.
- Feng Lijie, Sheng Ze, Zhang Huyi. Fuzzy sliding mode control based on improved exponential reaching law[J]. *Science Technology and Engineering*, 2024, 24(10): 4108-4114. (in Chinese)
- [20] 米阳, 李文林, 井元伟. 基于幂次趋近律的一类离散时间系统的变结构控制[J]. *控制与决策*, 2008, 23(6): 643-646.
- Mi Yang, Li Wenlin, Jing Yuanwei. Variable structure control for a class of discrete-time system based on power reaching law[J]. *Control and Decision*, 2008, 23(6): 643-646. (in Chinese)

(编辑: 丛艳娟)